KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

2. ÅRSPRØVE 2011 S-2 DM rx ret

SKRIFTLIG EKSAMEN I DYNAMISKE MODELLER

Tirsdag den 9. august 2011

RETTEVEJLEDNING

Opgave 1. Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ givet ved

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 3z^2 - 4.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 3\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 3\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 100e^t.$$

(1) Bestem rødderne i fjerdegradspolynomiet P.

Løsning. Vi ser, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 3z^2 - 4 = (z^2 - 1)(z^2 + 4),$$

så rødderne er $-1, 1, 2i$ og $-2i$.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. På grundlag af resultatet i spørgsmål 1 får vi, at

$$x = c_1e^{-t} + c_2e^t + c_3\cos(2t) + c_4\sin(2t),$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. Da funktionen $g(t) = 100e^t$ er en løsning til den homogene differentialligning $(*)$, gætter vi på en løsning af formen $f(t) = Ate^t$.

Vi får nu, at $f^{'}(t) = A(t+1)e^t$, $f^{''}(t) = A(t+2)e^t$, $f^{'''}(t) = A(t+3)e^t$ og $f^{''''}(t) = A(t+4)e^t$, og ved indsættelse i differentialligningen $(**)$ får vi, at $A = 10$. den fuldstændige løsning er derfor

$$x = c_1e^{-t} + c_2e^t + c_3\cos(2t) + c_4\sin(2t) + 10te^t,$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

(4) Løs differentialligningen

$$\frac{d^6y}{dt^6} + 3\frac{d^4y}{dt^4} - 4\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Løsning. Det karakteristiske polynomium $Q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ for denne differentialligning er givet ved

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : Q(z) = z^2P(z) = z^2(z^4 + 3z^2 - 4),$$

og de karakteristiske rødder er derfor 0 (med multiplicitet 2), $-1, 1, 2i$ og $-2i$.

Heraf finder vi så, at den fuldstændige løsning er

$$y = c_1 + c_2t + c_3e^{-t} + c_4e^t + c_5\cos(2t) + c_6\sin(2t),$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 \in \mathbf{R}$.

(5) Lad $a, b \in \mathbf{R}$. Vis, at differentialligningen

$$\frac{d^4x}{dt^4} + a\frac{d^2x}{dt^2} + bx = 0$$

ikke er globalt asymptotisk stabil for nogen $a, b \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi ser, at Routh-Hurwitz' matrix til denne differentialligning er

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}.$$

Heraf fremgår det straks, at den givne differentialligning ikke kan være globalt asymptotisk stabil for nogen $a, b \in \mathbf{R}$.

(6) Lad $a, b \in \mathbf{R}$. Vis, at differentialligningen

$$\frac{d^5x}{dt^5} + a\frac{d^3x}{dt^3} + b\frac{dx}{dt} = 0$$

ikke er globalt asymptotisk stabil for nogen $a, b \in \mathbf{R}$.

Løsning. Vi ser, at Routh-Hurwitz' matrix til denne differentialligning er

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraf fremgår det umiddelbart, at den givne differentialligning ikke kan være globalt asymptotisk stabil for nogen $a, b \in \mathbf{R}$.

Opgave 2. Vi betragter differentialligningssystemerne

$$(\$) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 7y \end{cases}$$

og

$$(\$\$) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 2y + 45 \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 7y + 90 \end{cases}.$$

(1) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet (\$).

Løsning. Den til differentialligningssystemet (\$) hørende matrix er

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomium $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ for matricen A er givet ved

$$\forall\, t \in \mathbf{R} : \det(A - tE) = (7 - t)^2 - 4,$$

og de karakteristiske rødder, altså rødderne i P som netop er egenværdierne for A, er $t_1 = 5$ og $t_2 = 9$.

De tilhørende egenrum bliver så

$$V(5) = N(A - 5E) = \text{span}\{(-1, 1)\} \text{ og } V(9) = N(A - 9E) = \text{span}\{(1, 1)\}.$$

Heraf finder vi så, at differentialligningssystemet (\$) har den fuldstændige løsning

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(t) = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{9t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x = x(t) = -c_1 e^{5t} + c_2 e^{9t} \wedge y = y(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{9t},$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

(2) Bestem den specielle løsning $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ til (\$), således at betingelsen $(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (2, 10)$ er opfyldt.

Løsning. Betingelsen $(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (2, 10)$ giver, at $-c_1 + c_2 = 2$ og $c_1 + c_2 = 10$, hvoraf vi får, at $c_1 = 4$ og $c_2 = 6$. Derfor gælder det, at

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = -4e^{5t} + 6e^{9t} \wedge \tilde{y} = \tilde{y}(t) = 4e^{5t} + 6e^{9t}.$$

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet (\$\$).

Løsning. Da $\det(A) = 45$, er matricen A regulær, og vi finder, at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/45 & -2/45 \\ -2/45 & 7/45 \end{pmatrix}.$$

Differentialligningssystemet (\$\$) har derfor den konstante løsning

$$\mathbf{k} = -A^{-1} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet (\$\$) er derfor

$$x = x(t) = -c_1 e^{5t} + c_2 e^{9t} - 3 \wedge y = y(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{9t} - 12,$$

hvor $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Opgave 3. Vi betragter vektorfunktionen $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ givet ved

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{f}(x, y) = \Big(\frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \Big).$$

(1) Vis, at vektorfunktionen $\mathbf{f}$ har præcis et fikspunkt, og bestem dette fikspunkt.

Løsning. Vi finder umiddelbart, at

$$\frac{x}{1+x^2+y^2} = x \,\wedge\, \frac{y}{1+x^2+y^2} = y \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Punktet $(0,0)$ er således det eneste fikspunkt for vektorfunktionen $\mathbf{f}$.

(2) Vis, at

$$\forall\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \|\mathbf{f}(x,y)\| \leq \|(x,y)\|.$$

Løsning. Vi ser, at

$$\|\mathbf{f}(x,y)\| = \sqrt{\frac{x^2}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(1+x^2+y^2)^2}} = \frac{1}{1+x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} =$$

$$\frac{1}{1+x^2+y^2}\|(x,y)\| \leq \|(x,y)\|.$$

(3) Bestem mængden

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \|\mathbf{f}(x,y)\| = \|(x,y)\|\}.$$

Løsning. Fra det foregående spørgsmål får vi umiddelbart, at

$$\|\mathbf{f}(x,y)\| = \|(x,y)\| \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0),$$

så $A = \{(0,0)\}$.

(4) Vis, at mængden

$$K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \,\wedge\, x \geq 0\}$$

er kompakt og konveks.

Løsning. Vi ved, at den afsluttede cirkelskive

$$C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

er kompakt og konveks, og at den afsluttede halvplan

$$H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0\}$$

er konveks. Da mængden K er fællesmængden af disse to mængder, får vi, at K er både kompakt og konveks.

(5) Vis, at mængden

$$\mathbf{f}(K) = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid \exists (x, y) \in K : (u, v) = \mathbf{f}(x, y)\}$$

er kompakt, og vis, at $\mathbf{f}(K) \subseteq K$.

Løsning. Da mængden K er kompakt, og da vektorfunktionen $\mathbf{f}$ er kontinuert, er mængden $\mathbf{f}(K)$ kompakt. At $\mathbf{f}(K) \subseteq K$ følger umiddelbart af definitionen på vektorfunktionen $\mathbf{f}$.

(6) Bestem Jacobimatricen (funktionalmatricen) $D\mathbf{f}(x, y)$ for vektorfunktionen $\mathbf{f}$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} \\ -\frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

(7) Bestem determinanten $\det D\mathbf{f}(x, y)$ for Jacobimatricen $D\mathbf{f}(x, y)$ i et vilkårligt punkt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi ser, at

$$\det D\mathbf{f}(x, y) = \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \frac{1 + x^2 - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} - \Big(- \frac{2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \Big)^2 =$$

$$\frac{1 - (x^2 + y^2)^2}{(1 + x^2 + y^2)^4}.$$

Opgave 4. Vi betragter funktionen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ givet ved

$$\forall\, (t, x, y) \in \mathbf{R}^3 : F(t, x, y) = x + \frac{1}{2} e^t y^2.$$

Desuden betragter vi funktionalen

$$I(x) = \int_0^1 \Big(x + \frac{1}{2} e^t \Big(\frac{dx}{dt} \Big)^2 \Big)\, dt.$$

(1) Vis, at for ethvert fastholdt $t \in \mathbf{R}$ er F en konveks funktion i (x, y) på hele $\mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 \text{ og } \frac{\partial F}{\partial x} = e^t y.$$

Da er Hessematricen

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Det er klart, at Hessematricen $H(x, y)$ er positiv semidefinit overalt på $\mathbf{R}^2$, så F er en konveks funktion i (x, y) på hele $\mathbf{R}^2$.

(2) Bestem den funktion $x^* = x^*(t)$, der minimerer funktionalen $I(x)$, idet randværdibetingelserne $x^*(0) = -1$ og $x^*(1) = 5 - 2e^{-1}$ er opfyldt.

Løsning. Eulers differentialligning

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big) = 0$$

bliver i dette tilfælde

$$1 - \frac{d}{dt}\Big(e^t \dot{x}\Big) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\Big(e^t \dot{x}\Big) = 1 \Leftrightarrow e^t \dot{x} = t + A \Leftrightarrow$$
$$\dot{x} = te^{-t} + Ae^{-t},$$

hvor $A \in \mathbf{R}$.

Ved at benytte partiel integration får vi derpå, at

$$x = -te^{-t} - \int (-e^{-t})\, dt + A \int e^{-t}\, dt + B = -te^{-t} - e^{-t} - Ae^{-t} + B,$$

hvor $A, B \in \mathbf{R}$.

Da funktionen $F = F(x, y)$ er konveks, er der tale om et minimeringsproblem. Ud fra randværdibetingelserne $x^*(0) = -1$ og $x^*(1) = 5 - 2e^{-1}$ får vi, at $-1 - A + B = -1$, og at $-e^{-1} - e^{-1} - Ae^{-1} + B = 5 - 2e^{-1}$. Dette giver os, at

$$A = B = \frac{5}{1 - e^{-1}} = \frac{5e}{e - 1}.$$

Den søgte funktion er derfor

$$x^* = x^*(t) = \frac{5e}{e - 1}\Big(1 - e^{-t}\Big) - e^{-t}\Big(1 + t\Big).$$